Lycée **Alfred Kastler** de Talence
Lycée **Vaclav Havel** de Bègles

La bataille des Hydres

MATh en JEANS
2016/2017

Julien Baillou
Thomas Barillot
Mael Bouquinet
Amine Bakhtiar
Simon Nagels

Louise Montaye
Lucie De Maury
Kintana Anninos
Pauline Cerello
Florentin Borne

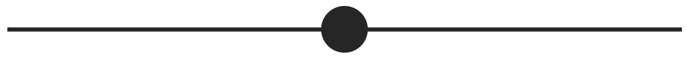
Léa Cerello
Sandra Alves Monteiro
Diana Pinheiro Veira
Milen Peron
Leo Dairain

Chercheur :
Adrien Boussicault

Enseignants :
Corinne Ribrault, Guillaume Boix
Cathy Racadot, Nadine Castagnos
Charlie Collin

1 Notion de hauteur

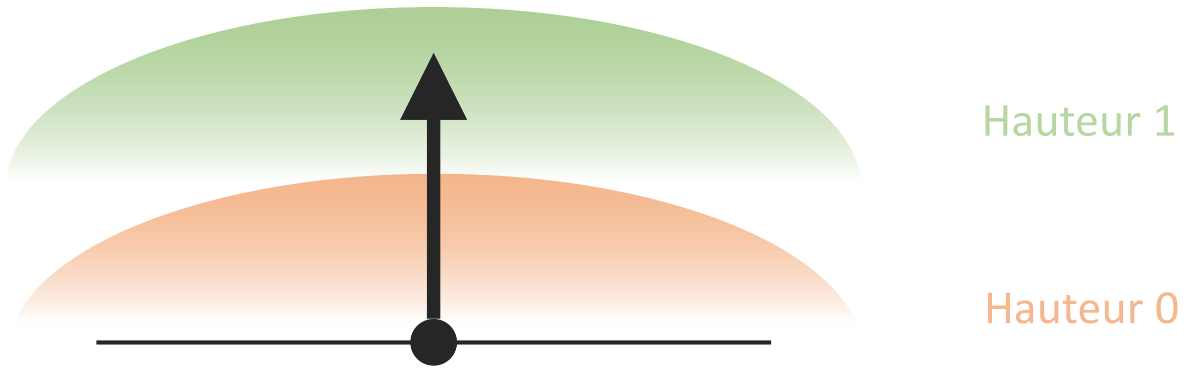
Hauteur 0



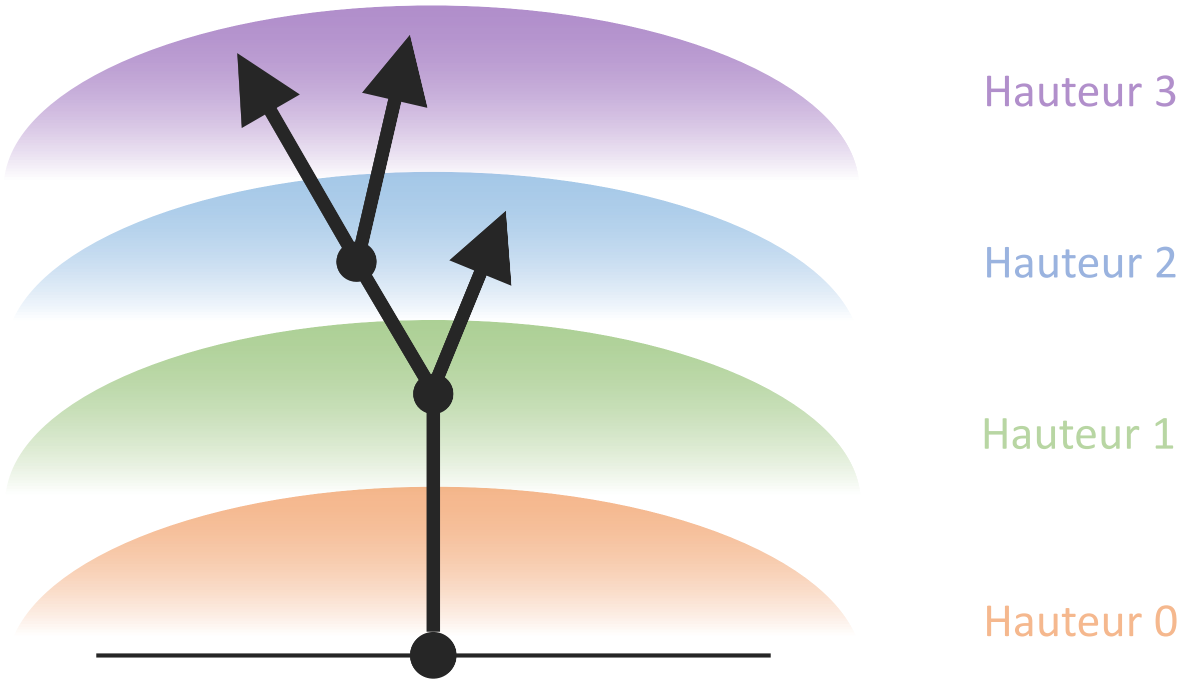
1

Notion de hauteur

Hauteur 1



1 Notion de hauteur
Hauteur 3



2

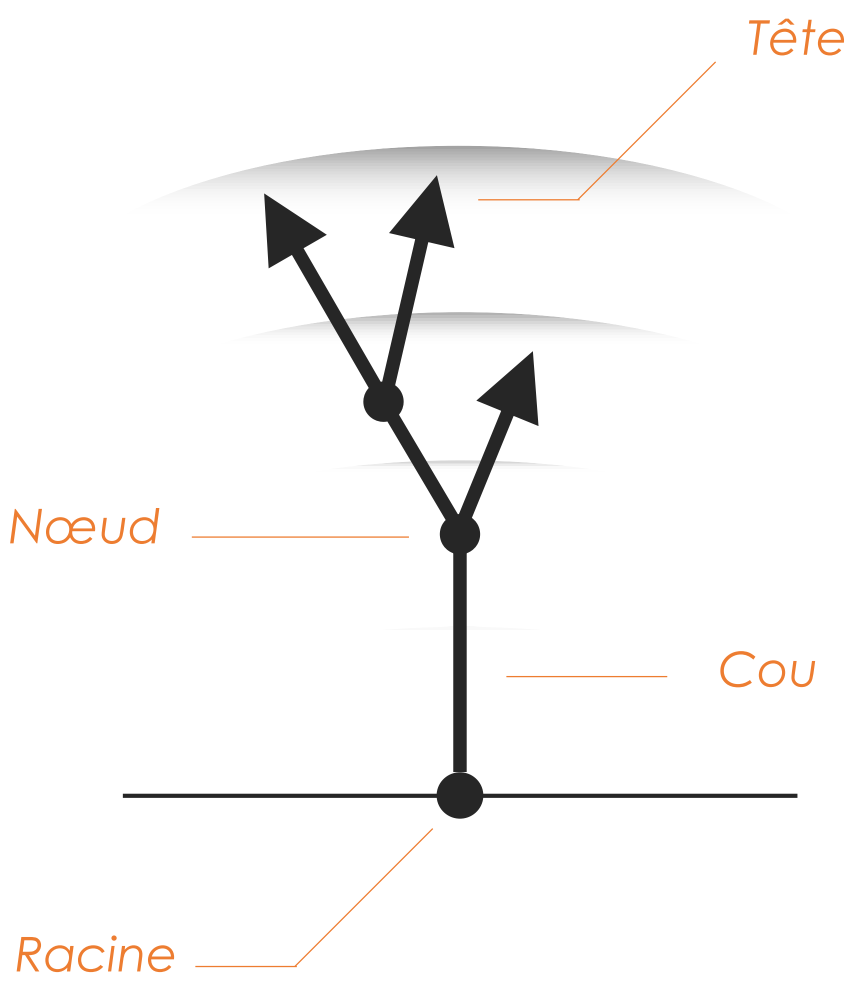
Définition

La taille, la hauteur et le terme objet

Définition de la hauteur (h)
La hauteur d'une hydre correspond au nombre de cous qui sépare la racine, de la tête la plus élevée.

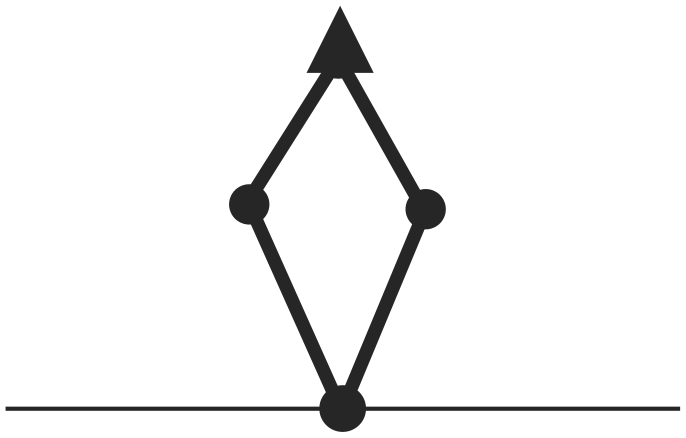
Définition de la taille (t)
La taille d'une hydre correspond à la somme du nombre de têtes, de nœuds et de la racine.

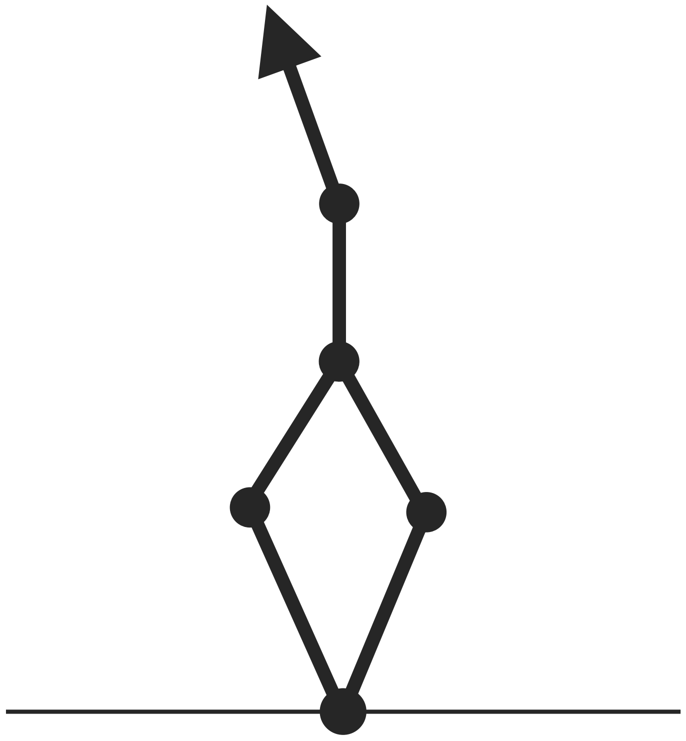
Définition d'un objet
Un objet désigne une tête, la racine ou un nœud.



2

Remarque
Cas impossible





Cas impossible
La pousse d'une hydre ne permet pas d'obtenir des situations où un objet possède plus d'un cou menant vers lui-même, c'est-à-dire, plus d'un cou précédant l'objet.

3 Que dit le sujet ?

Hercule et la bataille des hydres

Les questions à répondre :

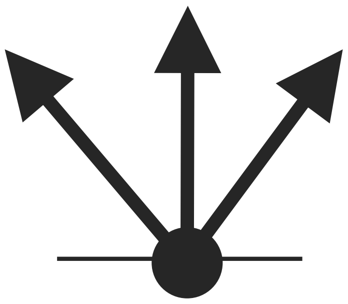
Existe-t-il une stratégie pour vaincre l'hydre ?

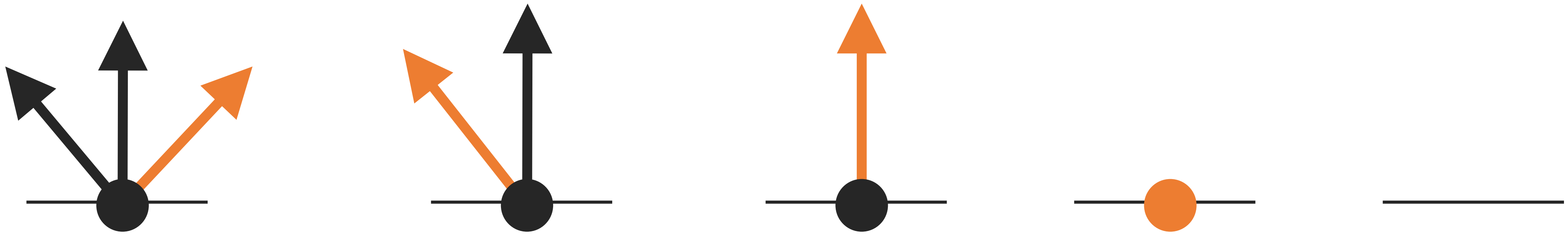
Que faut t-il ne surtout pas faire pour ne pas perdre contre l'hydre ?

En combien de coups peut-on tuer une hydre ?

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

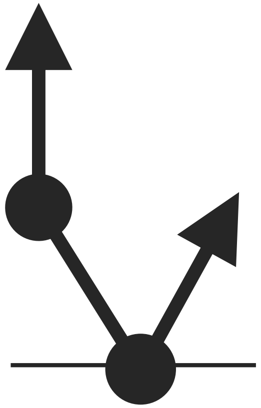
Introduction

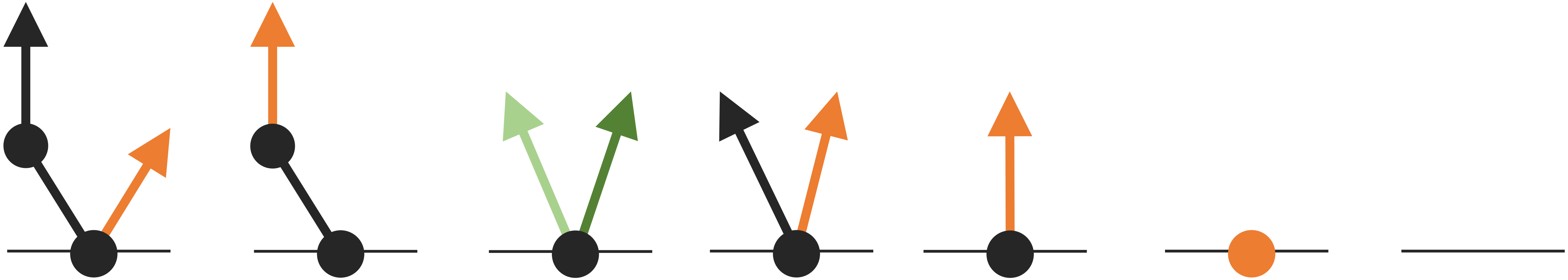




3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Introduction

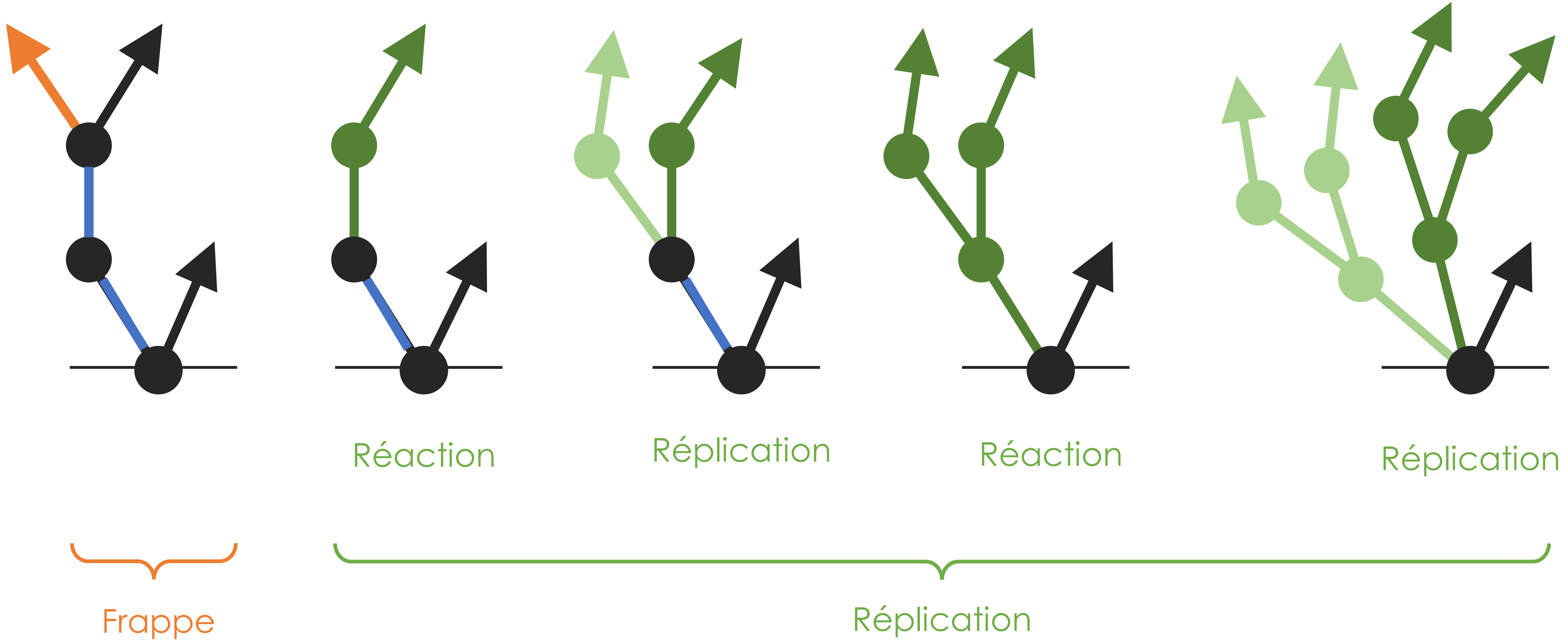




3

Nombre de frappes pour tuer une hydre

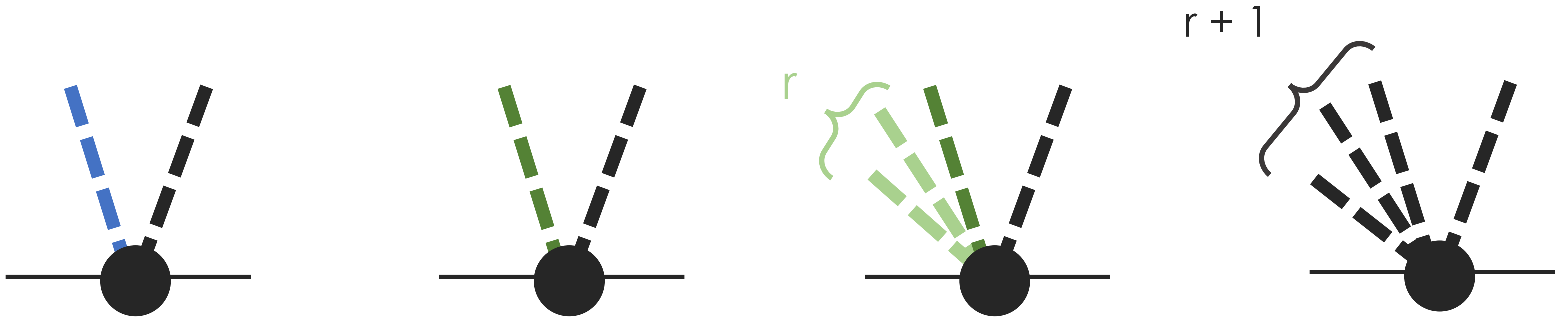
Phénomène de réplication



$r \in \mathbb{N}$

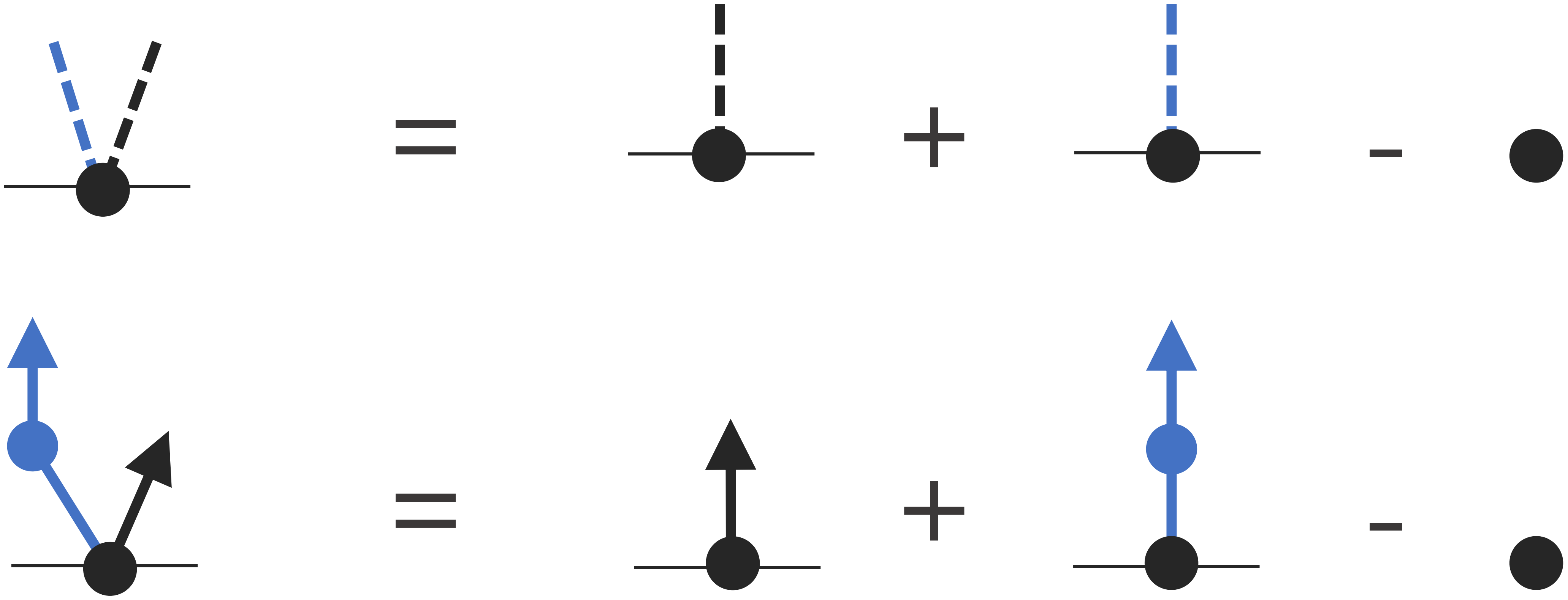
3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Indépendance des branches de hauteur 1 lors d’une réplication



3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Indépendance des branches de hauteur 1 lors d'une réplication

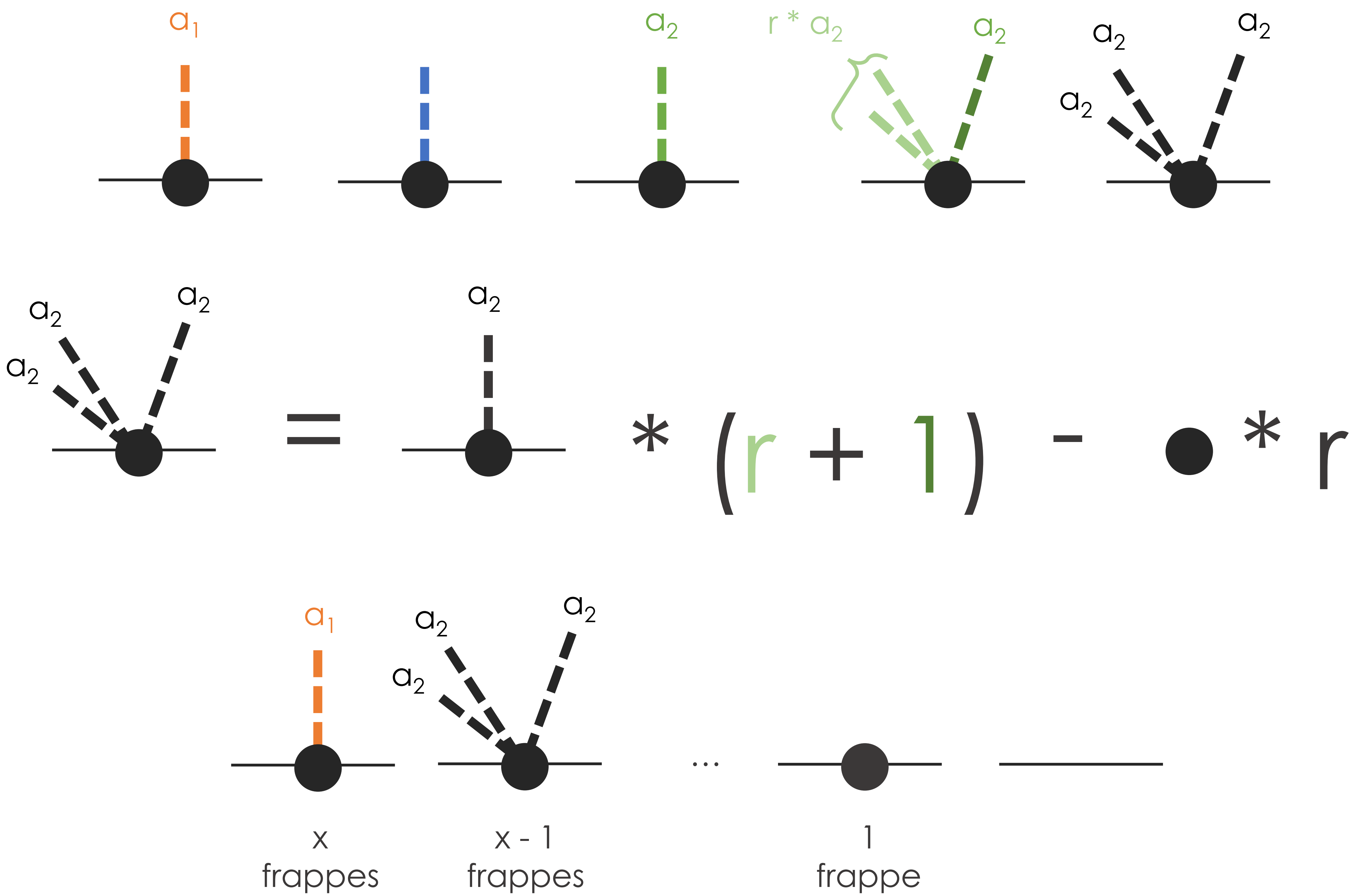


5
frappes

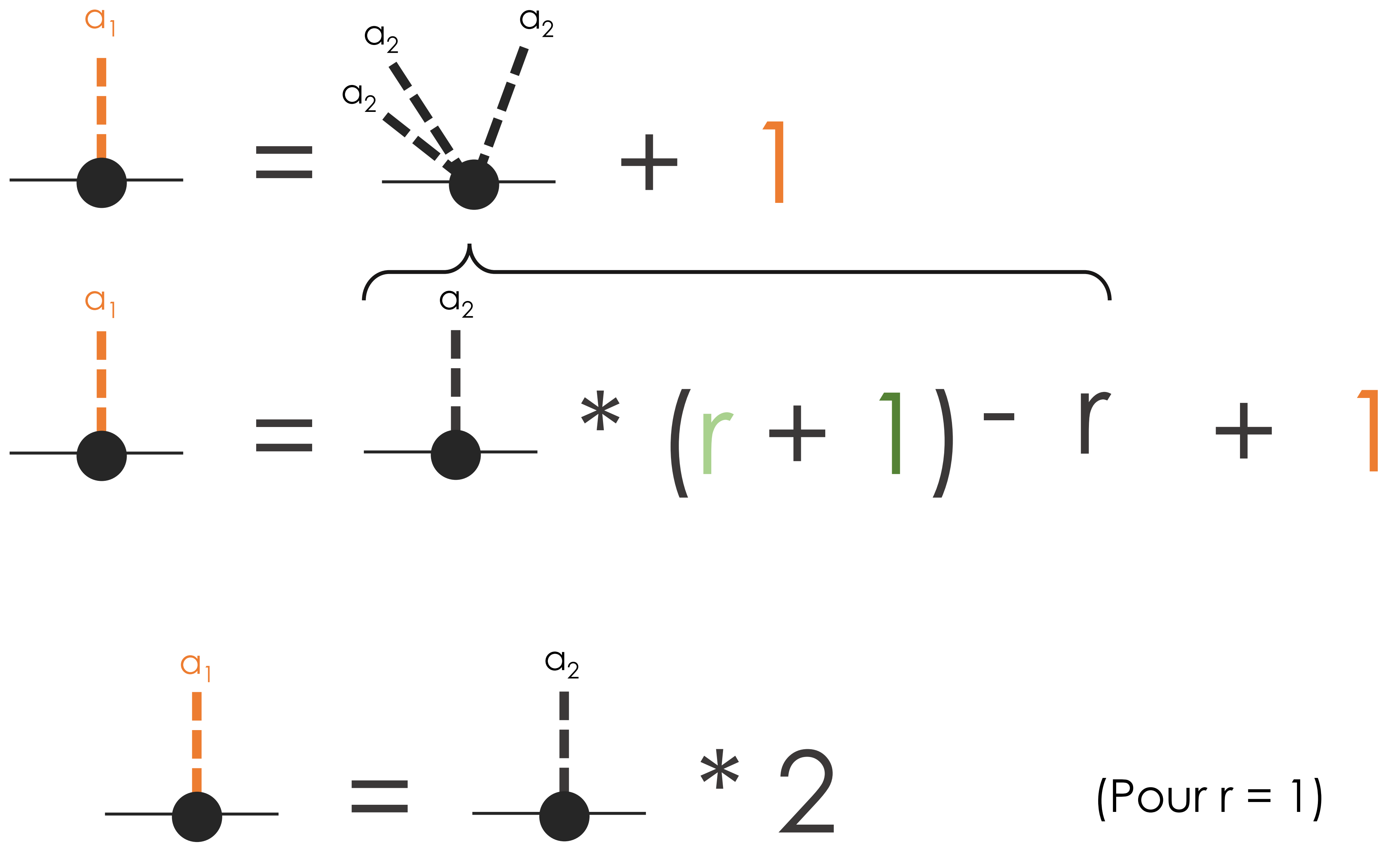
2
frappes

4
frappes

1
frappe

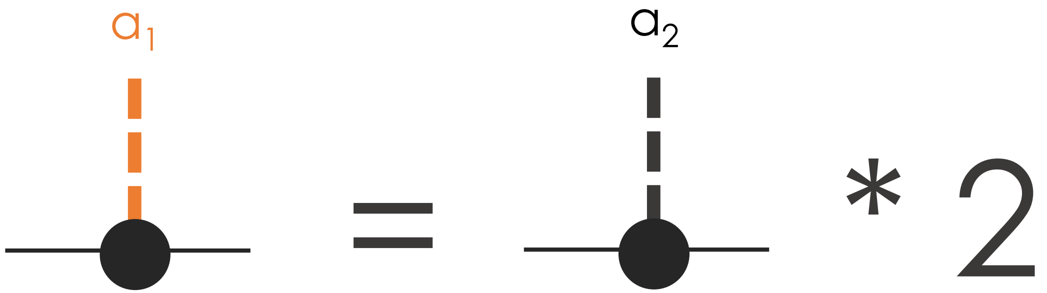

a1
a2
r * a2
a2
a2
a2
a2
a2
a2
a2
= * (r + 1) - * r
a1
a2
a2
a2
...
x
frappes
x - 1
frappes
1
frappe

$r \in \mathbb{N}$



3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Branche indépendante et réplication – Conclusion 1



Conclusion

Supposons que l'on coupe une tête quelconque d'une hydre composé d'une branche quelconque de hauteur strictement supérieur à 1.

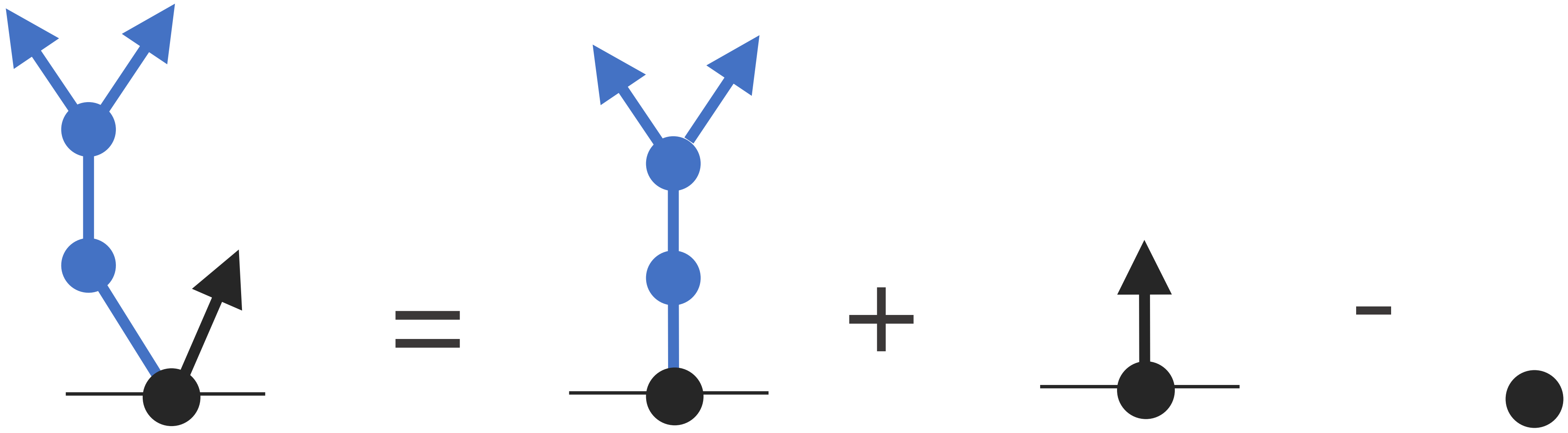
Le résultat après réplication sera deux branches similaires rattaché à une seule et même racine.

Ne gardons qu'une seul de ces branches, ainsi que la racine.

Le nombre de frappe pour tuer l'hydre initial est égale au double du nombre de coups pour tué cette nouvelle hydre.

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple

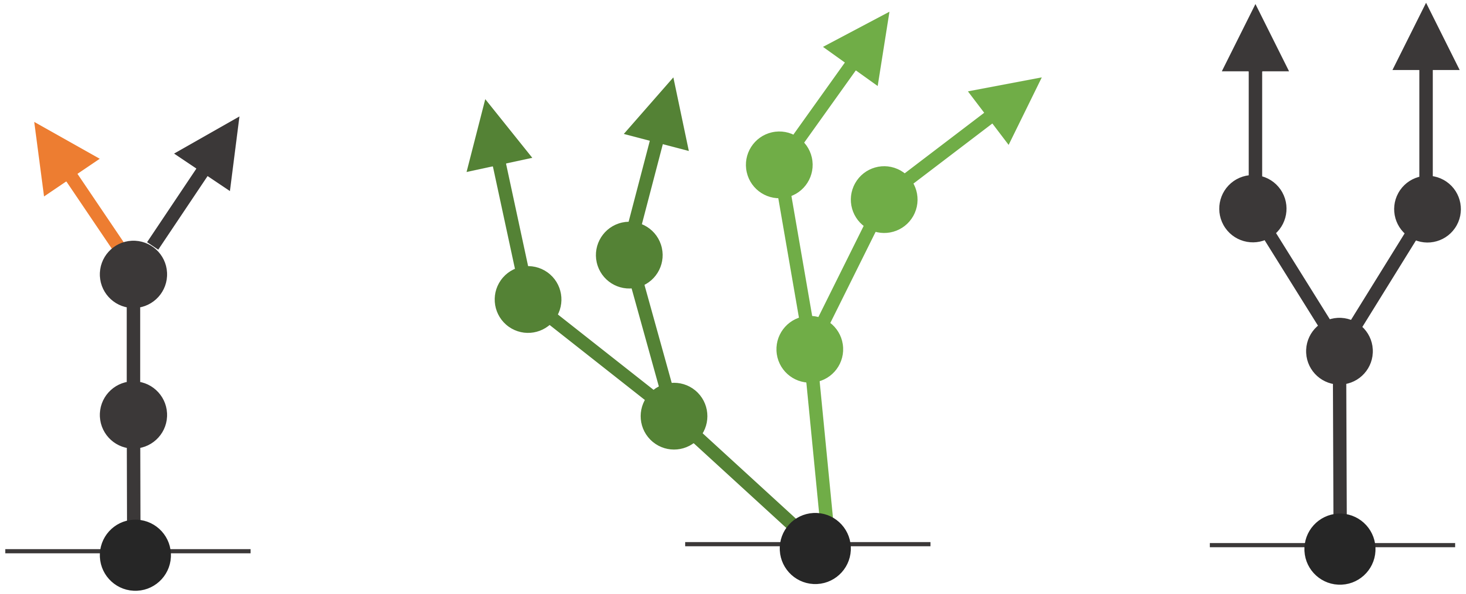


X frappes = Y frappes + 2 frappes - 1 frappe

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

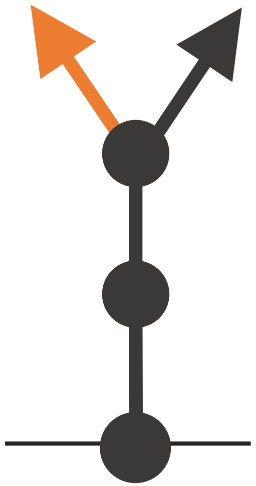
Exemple



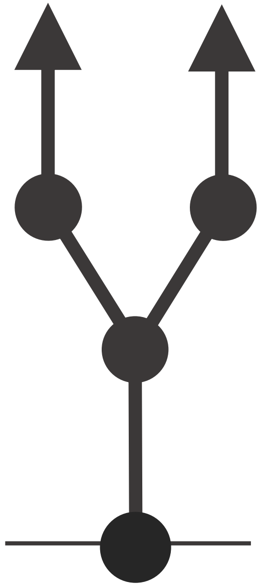
$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple



$=$

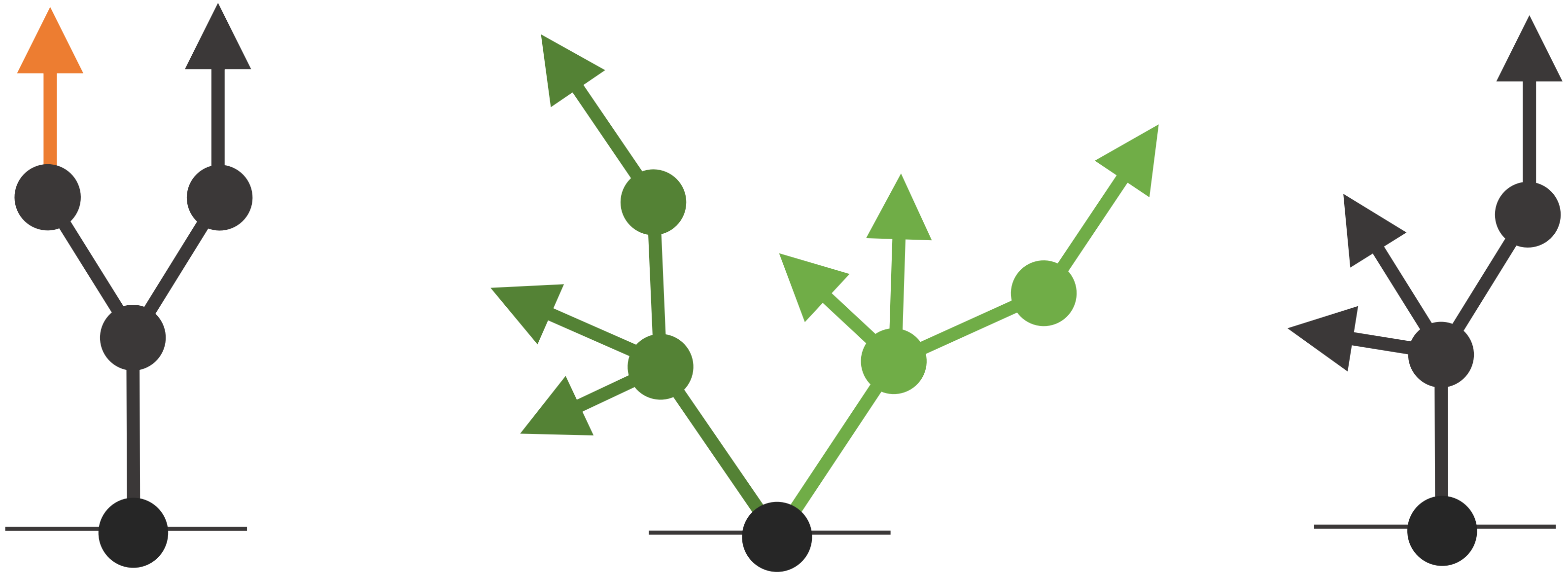


$* 2$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple

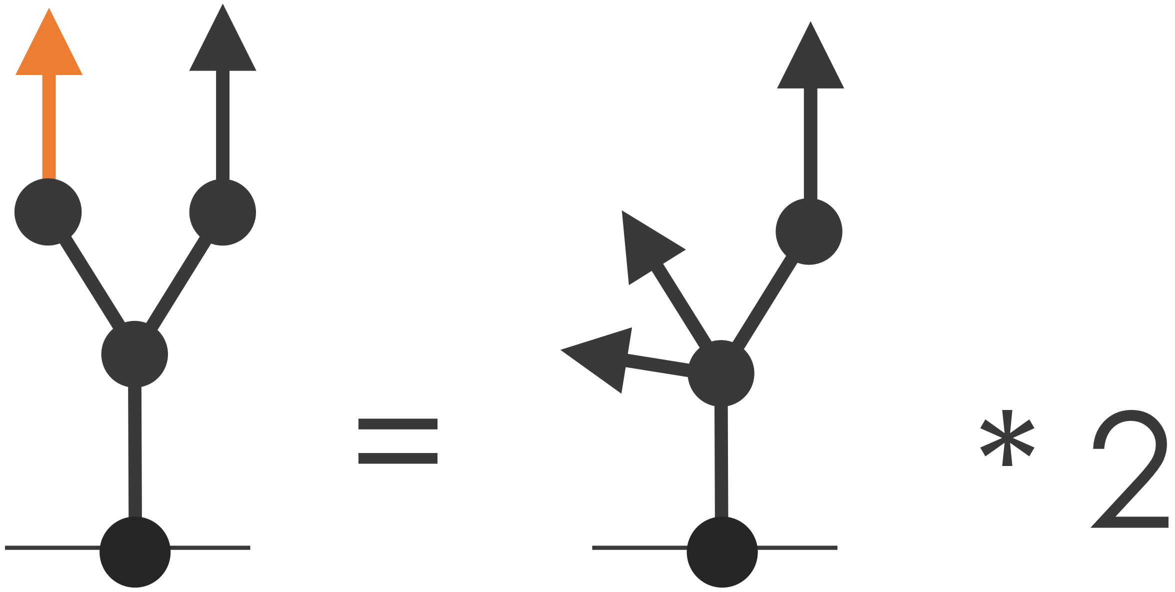


$r = 1$

3

Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple

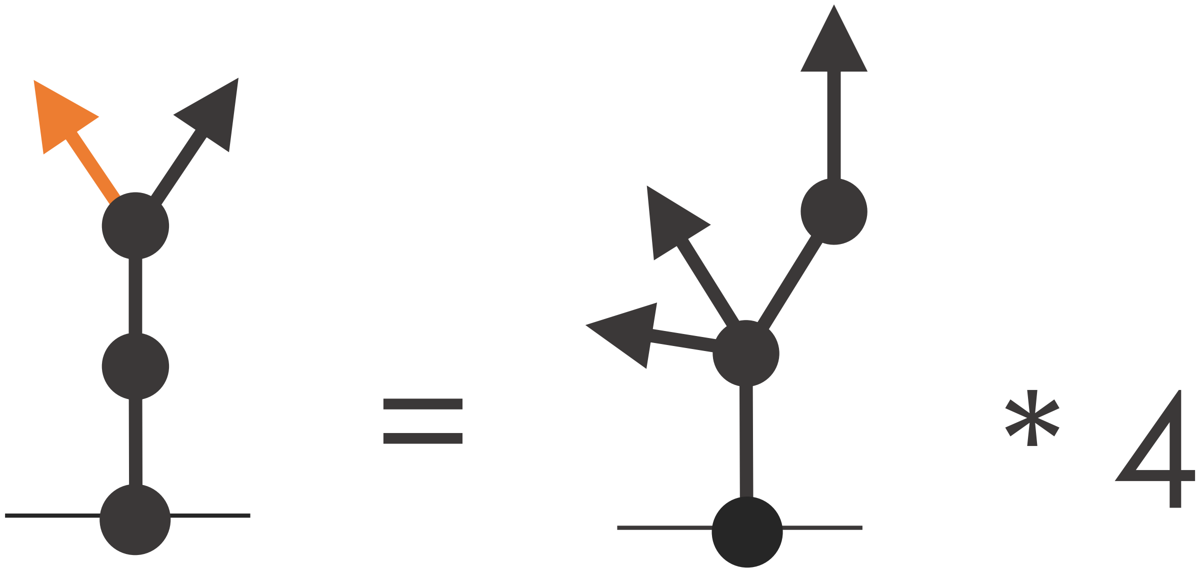


$r = 1$

3

Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple

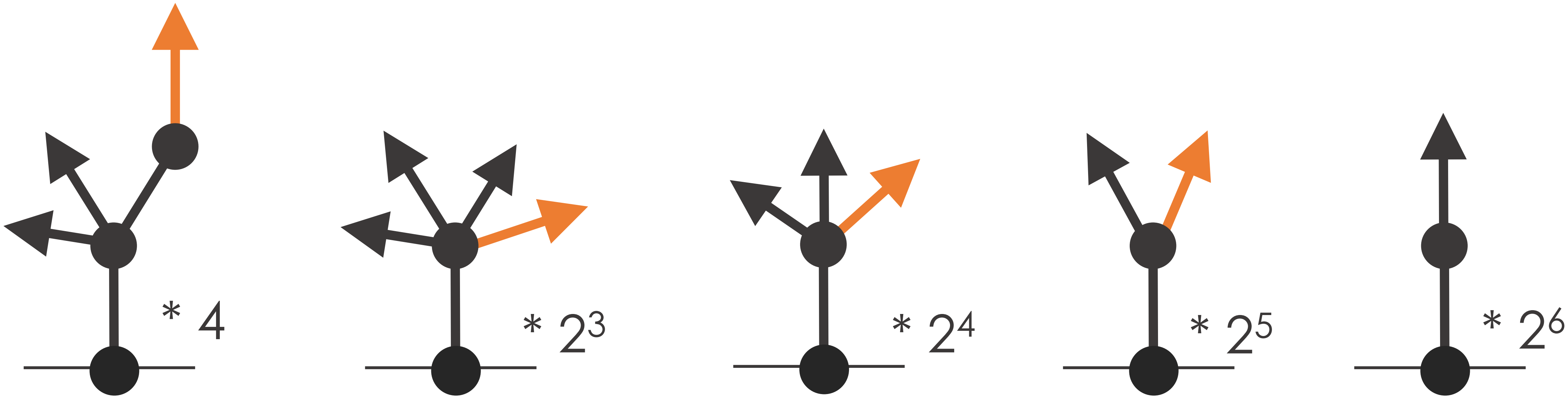


$r = 1$

3

Nombre de frappes pour tuer une hydre

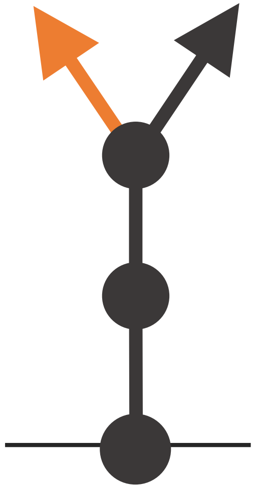
Exemple



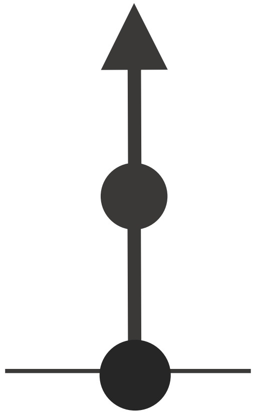
$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple



$= $



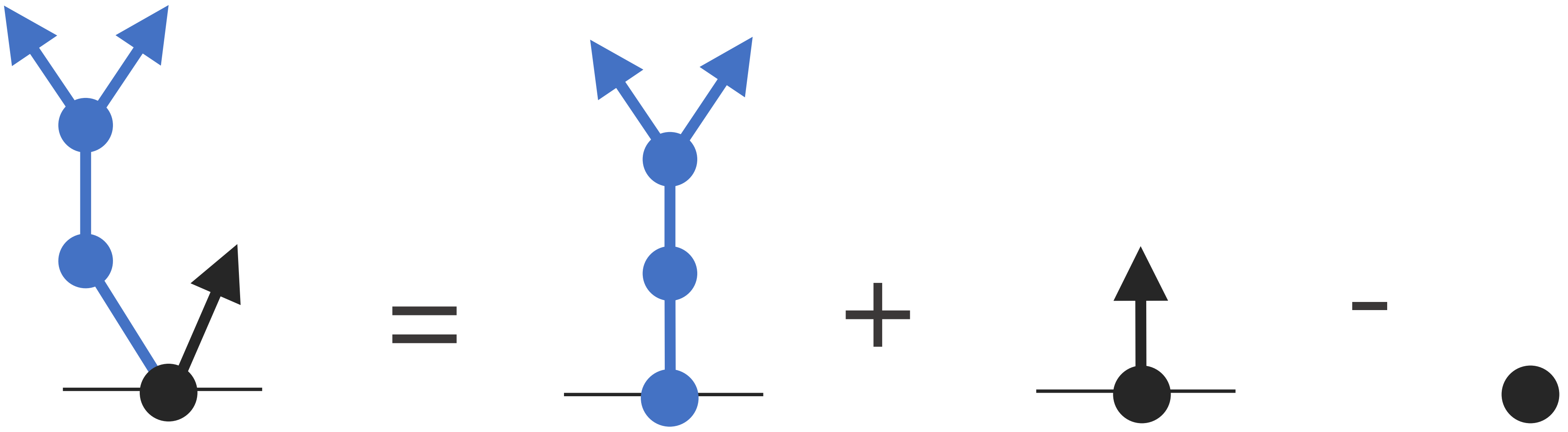
$* \; 2^6$

$Y = 4 * 2^6 = 2^8 = 256$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

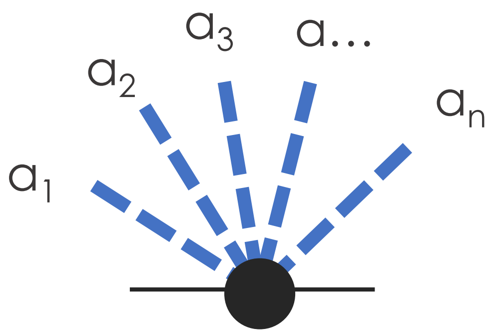
Exemple



257 frappes = 256 frappes + 2 frappes - 1 frappe

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Nombre de coups pour une hydre quelconque - Conclusion

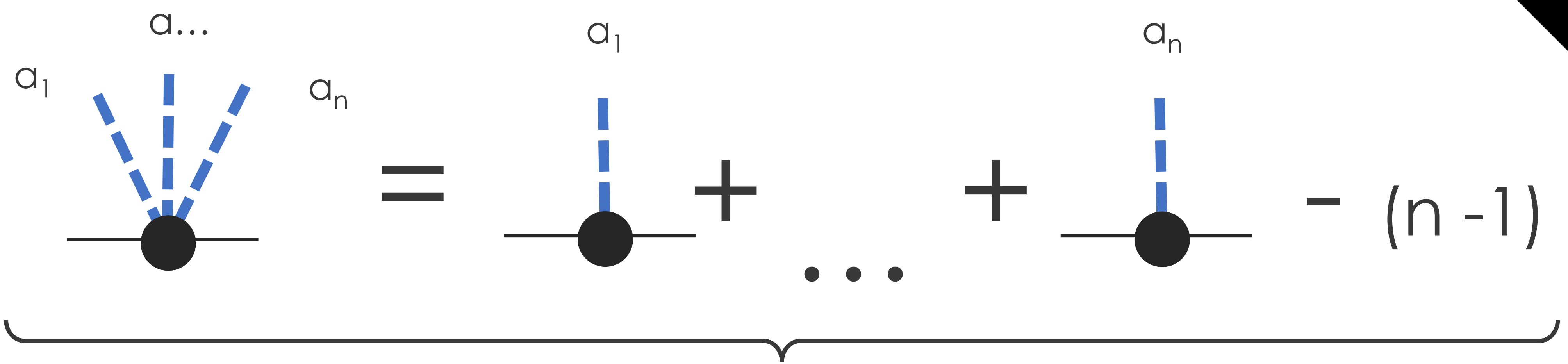


Conclusion

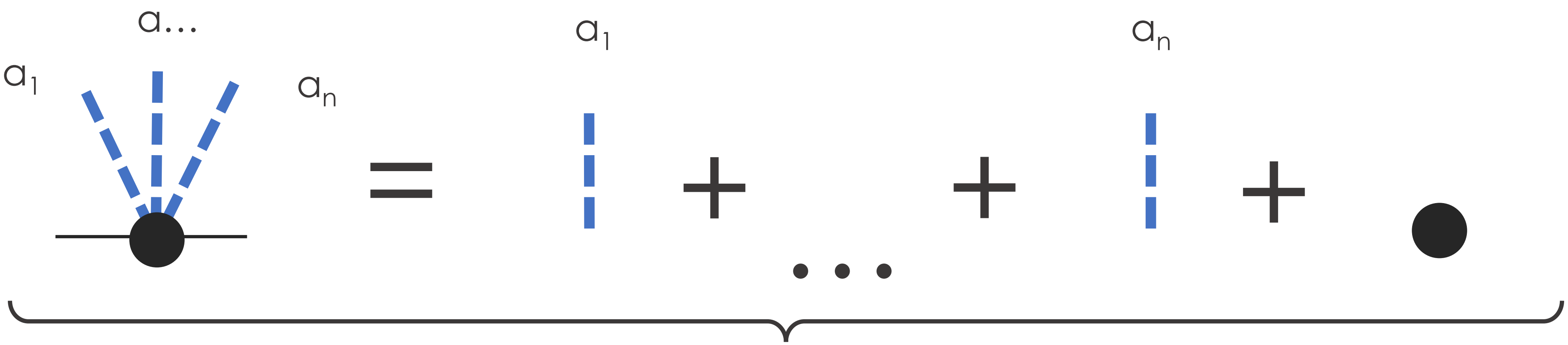
Soit la fonction Nf('x') qui associe à l'hydre nommé 'x' → Le nombre de frappes pour la tuer.
Soit une hydre nommé H composé de n branche quelconque,
chaqu'une désigné par le nom a_1 , a_2 , a_3 … jusqu'à a_n.

$$Nf(H) = -(n-1) + \sum_{i=1}^{n} Nf(a_i)$$

$$Nf(H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (Nf(a_i) - 1)$$



$$Nf(H) = -(n-1) + \sum_{i=1}^{n} Nf(a_i)$$

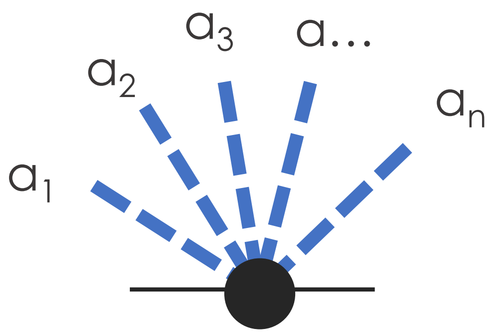


$$Nf(H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (Nf(a_i) - 1)$$

3

Nombre de frappes pour tuer une hydre

Nombre de coups pour une hydre quelconque - Conclusion



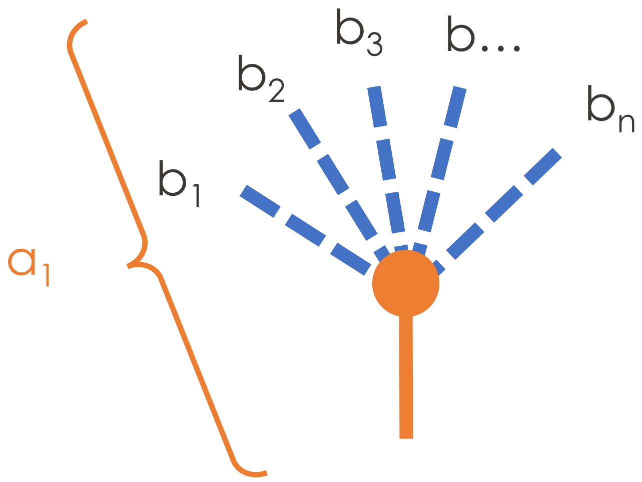
On propose donc que a_n ne désigne bien que la branche et pas la branche + la racine.
On obtiens donc :

$$Nf(H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} Nf(a_i)$$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Nombre de coups pour une branche quelconque - Conjecture

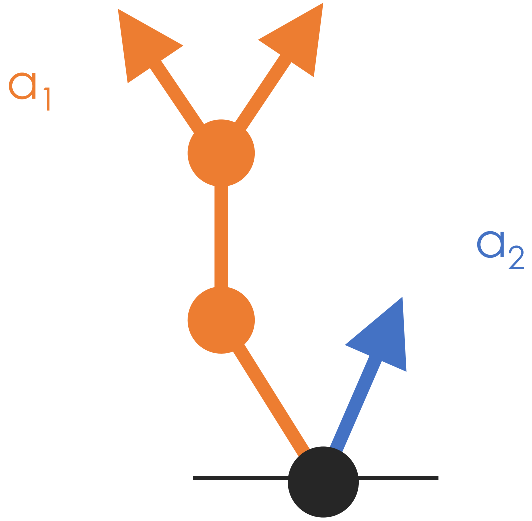


On conjecture la relation suivante :

$$Nf(a_1) = 2^{\left(1+\sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)\right)} - 1$$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Nombre de coups pour une hydre quelconque - Conclusion



257
coups

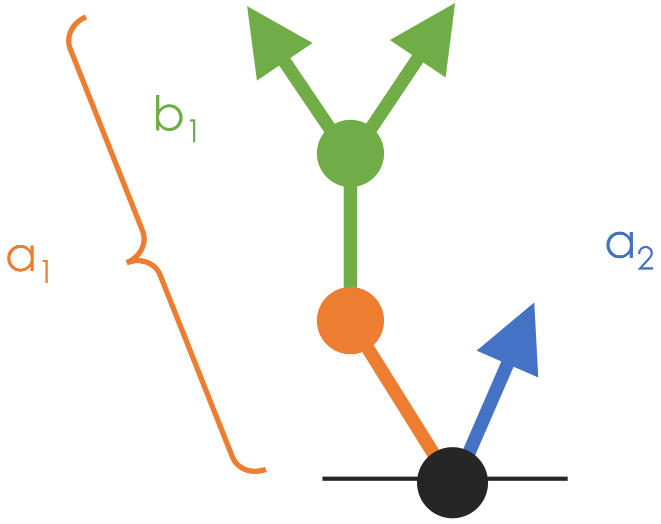
$$Nf(H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} Nf(a_i)$$

$$Nf(H) = 1 + Nf(a_1) + Nf(a_2)$$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple



257
coups

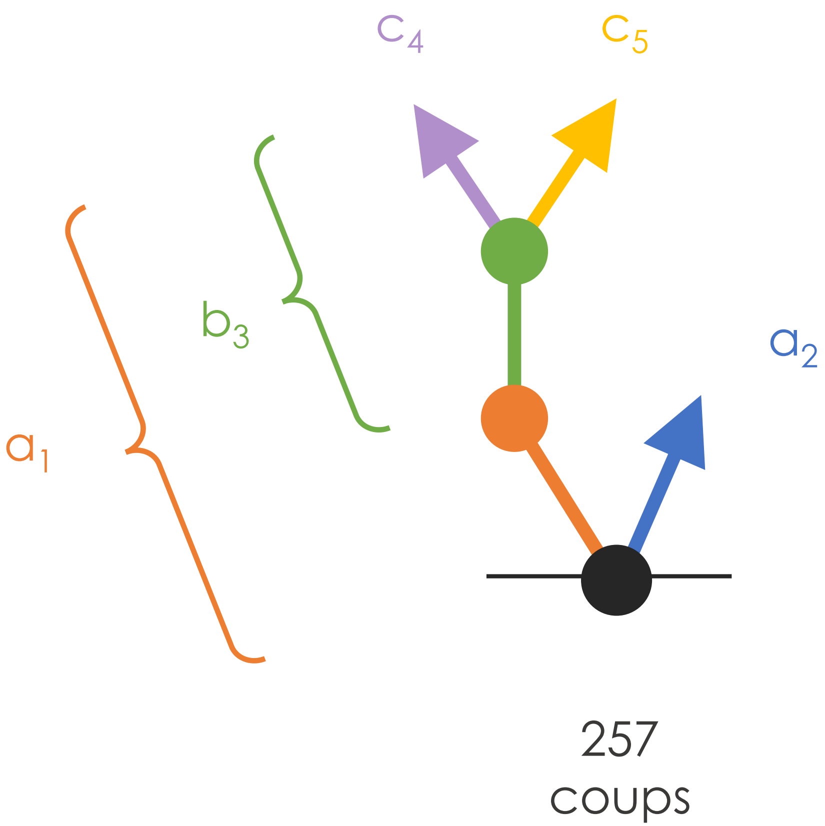
$$Nf(H) = 1 + Nf(a_1) + Nf(a_2)$$

$$Nf(a_1) = 2^{(1+Nf(b_1))}\text{-}1$$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple



$$Nf(H) = 1 + Nf(a_1) + Nf(a_2)$$

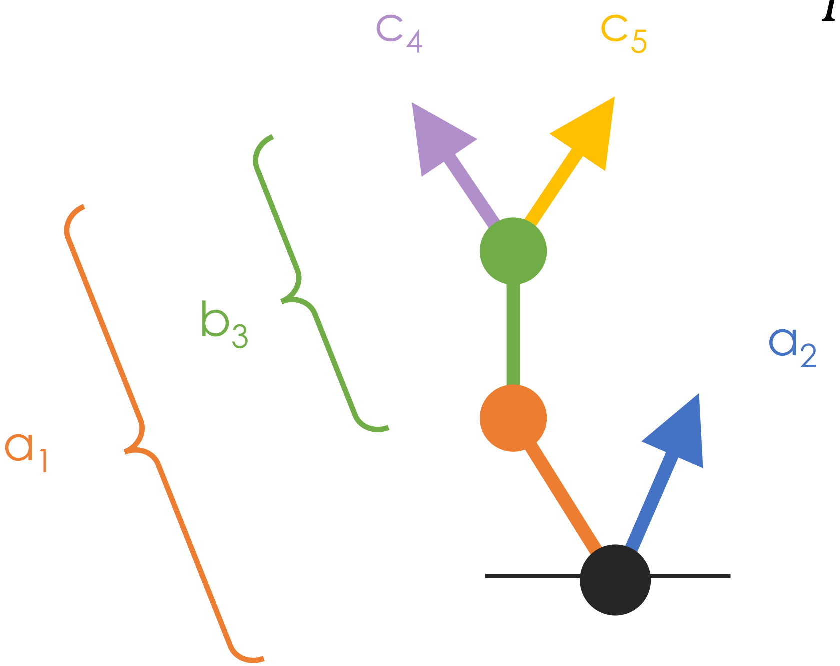
$$Nf(a_1) = 2^{(1+Nf(b_3))} - 1$$

$$Nf(b_3) = 2^{(1+Nf(c_4)+Nf(c_5))} - 1$$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple



257
coups

$$Nf(H) = 1 + 2^{\left(1+2^{\left(1+Nf(c_4)+Nf(c_5)\right)}-1\right)} - 1 + Nf(a_2)$$

$$Nf(a_2) = Nf(c_4) = Nf(c_5) = 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{\left(1+2^{(1+1+1)}\right)-1} - 1 + 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{\left(1+2^{(3)}\right)-1} - 1 + 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{8} - 1 + 1$$

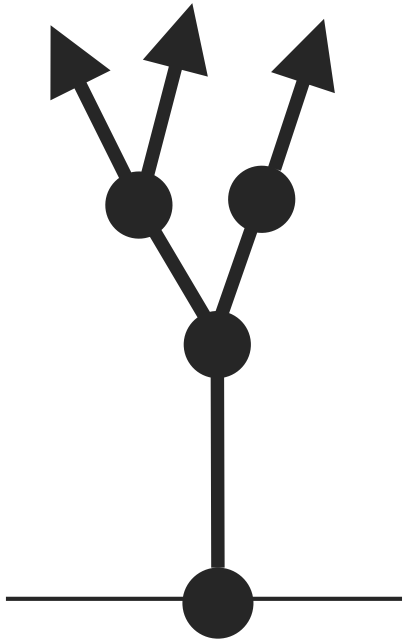
$$Nf(H) = 256 + 1$$

$$Nf(H) = 257$$

$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Exemple 2



2048
coups

$$Nf(H) = 1 + 2^{(1+2^{(1+2^{(1)}-1+2^{(1)}-1)}-1+2^{(1+2^{(1)}-1)}-1)} - 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{(1+2^{(1+1+1)}-1+2^{(1+1)}-1)} - 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{(1+2^3-1+2^2-1)} - 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{(1+8-1+4-1)} - 1$$

$$Nf(H) = 1 + 2^{11} - 1$$

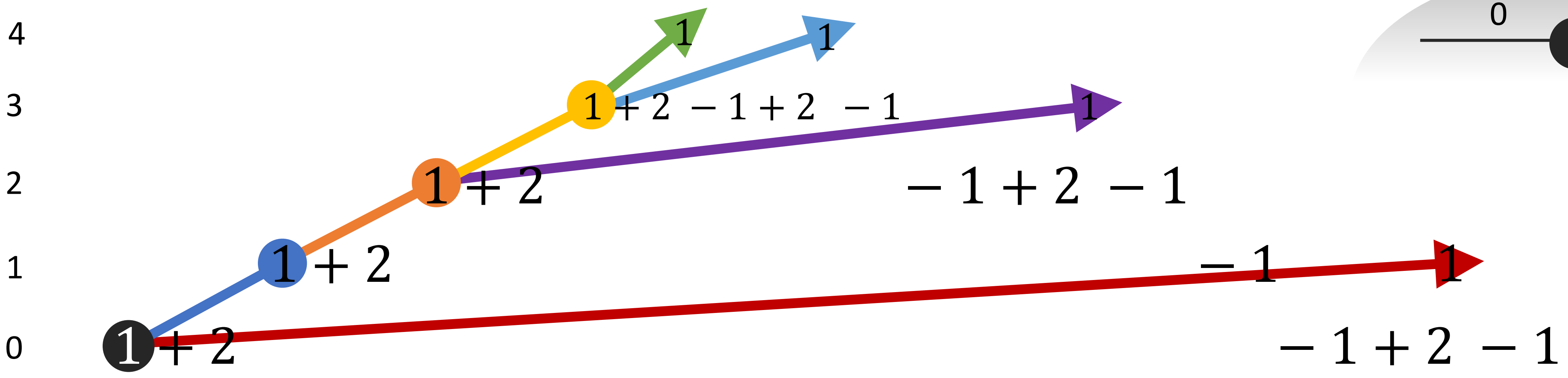
$$Nf(H) = 2^{11}$$

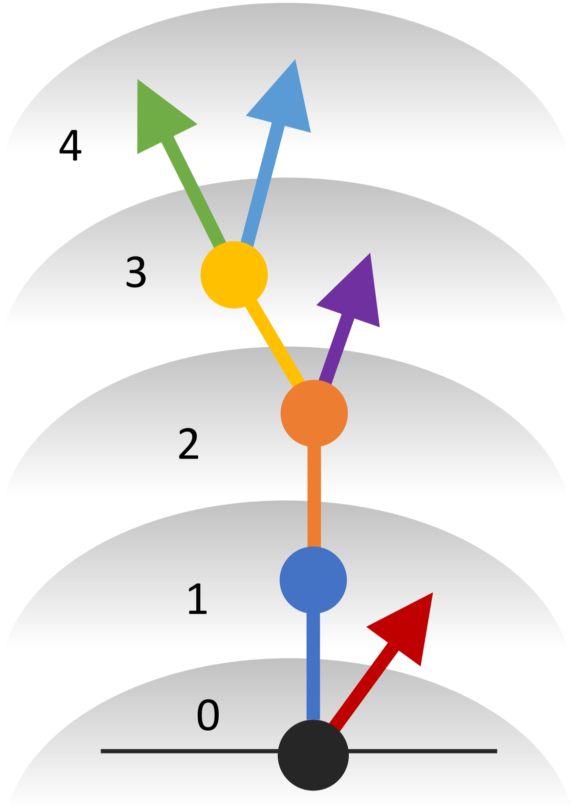
$$Nf(H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} Nf(a_i) - 1$$

$$\boxed{Nf(a_1) = 2^{(1+\sum_{i=1}^{n} Nf(b_i))} - 1}$$

3 Nombre de frappes

Exemple 3



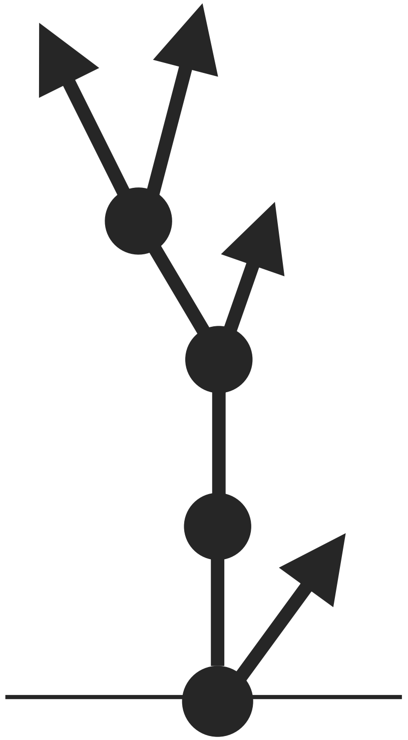


$r = 1$

3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

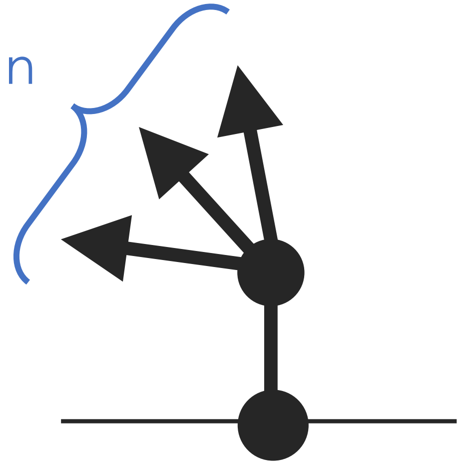
Exemple 3

$$Nf(H) = 1 + 2^{1+2^{1+\left(2^{1+1+1}-1\right)+1}-1} - 1+1$$
$$Nf(H) = 1 + 2^{1+2^{1+\left(2^{3}-1\right)+1}-1} - 1+1$$
$$Nf(H) = 1 + 2^{1+2^{1+(7)+1}-1} - 1+1$$
$$Nf(H) = 1 + 2^{1+2^{9}-1} - 1+1$$
$$Nf(H) = 1 + 2^{512} - 1+1$$
$$Nf(H) = 1 + 2^{512}$$



3 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Recherche d'une formule générale



r \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	1	3	7	15	31	63
2	1	4	13	40	121	364
3	1	5	21	85	341	1365
4	1	6	31	156	781	3906
5	1	7	43	259	1555	9331

a(n) = n+1
a(n) = (2^(1+n) - 1)/1
a(n) = (3^(1+n) - 1)/2
a(n) = (4^(1+n) - 1)/3
a(n) = (5^(1+n) - 1)/4
a(n) = (6^(1+n) - 1)/5

$$A(n) = \frac{(r+1)^{1+n} - 1}{r}$$

4

Nombre de frappes pour tuer une hydre
Super conjecture

r = Nombre de réplication

$$Nf(a_1) = 2^{1+\sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)} - 1$$

$$A(n) = \frac{(r+1)^{1+n} - 1}{r}$$

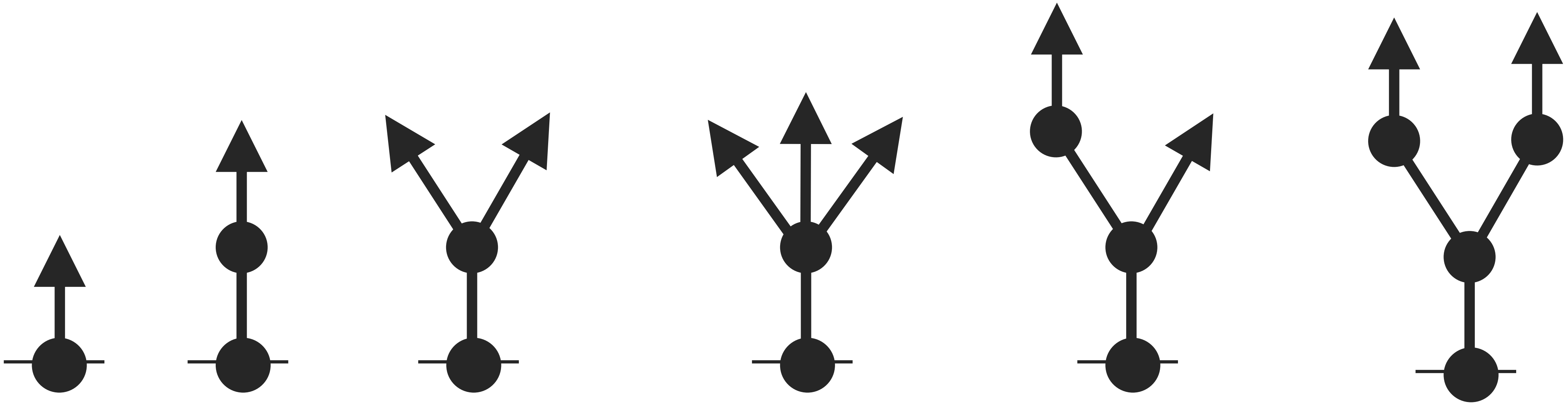
$$Nf(a_1) = \frac{(r+1)^{1+\sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)} - 1}{r}$$

$r \in \mathbb{N}$

4 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Super conjecture

$$Nf(a_1) = \frac{(r+1)^{1+\sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)} - 1}{r}$$



$r \in \mathbb{N}$

4 Nombre de frappes pour tuer une hydre

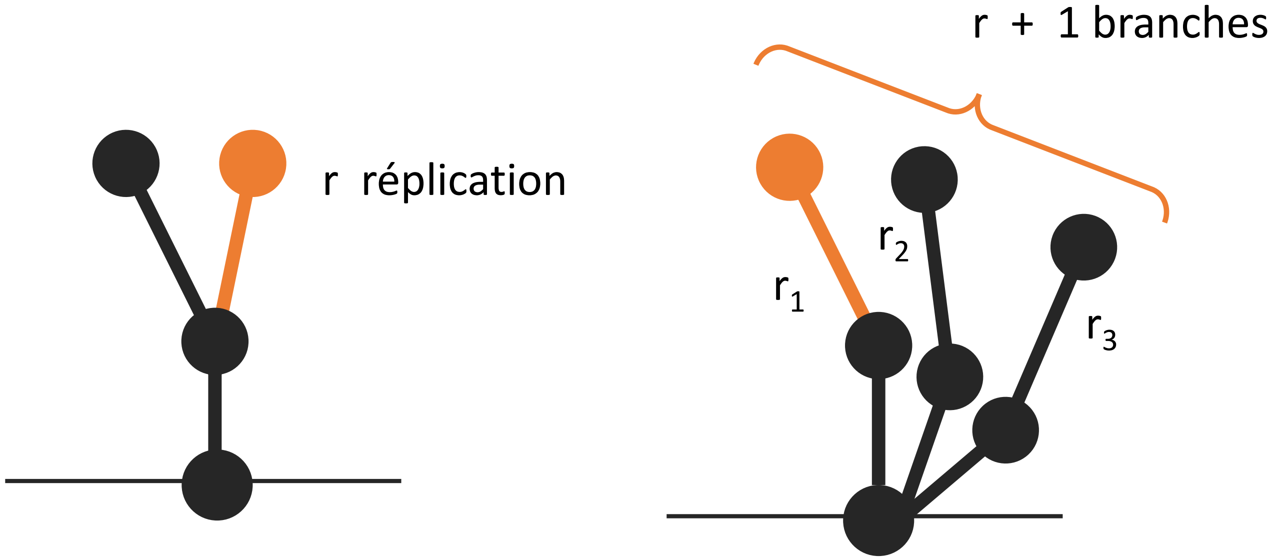
Pistes de travail

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ désigne des nombres entiers naturels aléatoire
$r_{min} = r_n$ ayant la valeur la plus faible
$r_{max} = r_n$ ayant la valeur la plus grande

$$\frac{(rmi_n + 1)^{1 + \sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)} - 1}{r_{min}} \leq Nf(a_1) \leq \frac{(rma_x + 1)^{1 + \sum_{i=1}^{n} Nf(b_i)} - 1}{r_{max}}$$

4 Nombre de frappes pour tuer une hydre

Pistes de travail



$$Nf(a_1) = \sum_{i=1}^{r+1} (ri + 1)$$

Conclusion

- Avons-nous répondu à la problématique ?
- Les pistes de recherche
- VENEZ à NOTRE STAND !